Matemática Aplicada - Lista de Ejercicios N° 2

14 de septiembre de 2016

1. Resuelva los siguientes sistemas usando el algoritmo de eliminación Gaussiana, de ser posible.

   a)
   $$\begin{aligned} v - w &= 3, \\ -2u + 4v - w &= 1, \\ -2u + 5v - 4w &= 2. \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

   d)
   $$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 4, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 5, \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 6. \end{aligned}$$

2. (Burden, Ejercicio 6.1.3) Use el algoritmo de la eliminación Gaussiana para resolver los sistemas lineales siguientes, de ser posible.

   a)
   $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} 2x_1 - 1{,}5x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -x_1 + 2x_3 &= 3, \\ 4x_1 - 4{,}5x_2 + 5x_3 &= 1. \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} 2x_1 &= 3, \\ x_1 + 1{,}5x_2 &= 4{,}5, \\ -3x_2 + 0{,}5x_3 &= -6{,}6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0{,}8. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

3. Repita el ejercicio anterior utilizando el método de Gauss-Jordan.

4. Responder las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál método requiere menos operaciones aritméticas, Gauss-Jordan o eliminación Gaussiana?

   b) ¿En qué casos es conveniente utilizar métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales?

   c) Generalmente, ¿cuál de los dos siguientes métodos iterativos requiere menos iteraciones para converger a la solución de un sistema lineal, Jacobi o Gauss-Seidel?

5. Resuelva los siguientes sistemas a través del método de Gauss-Jordan.

   a)

$$\begin{aligned} 4x_2 - 3x_3 &= 3, \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 4, \\ -x_1 + 8x_2 - 6x_3 &= 5. \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

6. (Burden, Ejercicio 7.3.1) Obtenga las dos primeras iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas lineales, usando $x^{(0)} = 0$:

   a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7, \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
10x_1 + 5x_2 &= 6,\\
5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25,\\
-4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11,\\
-x_3 + 5x_4 &= -11.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2,\\
x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1,\\
-x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0,\\
x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1.
\end{aligned}
$$

7. Repita el ejercicio anterior empleando el método de Gauss-Seidel.

8. (Burden, Ejercicio 7.3.5) Obtenga las dos primeras iteraciones del método SOR con $\omega = 1{,}1$ para los siguientes sistemas lineales usando $x^{(0)} = 0$:

a)

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + x_3 &= 1,\\
3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0,\\
3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
10x_1 - x_2 &= 9,\\
-x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7,\\
-2x_2 + 10x_3 &= 6.
\end{aligned}
$$

9. Encontrar los coeficientes en la ecuación de la parábola $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ que pasa por los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,0)$.

10. (Paseo aleatorio, Burden, Ejercicio 7.3.14) Suponga que un objeto puede estar en cualquiera de los $n+1$ puntos uniformemente espaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en una línea. Cuando un objeto se encuentra ubicado en el lugar x_i tendrá las mismas probabilidades de desplazarse hacia x_{i-1} o hacia x_{i+1}, y no puede dirigirse directamente hacia ninún otro lugar. Considere las probabilidades P_i, para $i = 0, 1, \ldots, n$, de que un objeto que parte del lugar x_i llegue al extremo x_0 antes de alcanzar el extremo x_n. Tenemos que $P_0 = 1$ y $P_n = 0$. Dado que el objeto puede desplazarse hacia x_i sólo a partir de x_{i-1} o de x_{i+1} y lo hace con probabilidad $\frac{1}{2}$ para cada uno de esos lugares,

$$P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Estas ecuaciones forman un sistema lineal de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas. Queremos resolver este sistema para $n = 10$ por el método de Jacobi. En la Figura 10 se muestra la implementación del método. Completar correctamente las celdas vacías para la iteración número 4 (columna F).

	A	B	C	D	E	F
10						
11						
12						
13	Iteracion	0	1	2	3	4
14						
15	n					
16	0	1	1	1	1	1
17	1	0	0,5	0,5	0,625	
18	2	0	0	0,25	0,25	
19	3	0	0	0	0,125	
20	4	0	0	0	0	
21	5	0	0	0	0	
22	6	0	0	0	0	
23	7	0	0	0	0	
24	8	0	0	0	0	
25	9	0	0	0	0	
26	10	0	0	0	0	0